

Данная статья представляет собой расширенную версию доклада, представленного на [конференции GraphiCon 2025](#).

О визуализации функций в пространстве большой размерности

А.К. Алексеев^{1,B}, А.Е. Бондарев^{2,A}

^A Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

^B ПАО РКК Энергия им. С.П. Королева, Королев, Россия

¹ ORCID: 0000-0001-8317-8688, post@rsce.ru

² ORCID: 0000-0003-3681-5212, bond@keldysh.ru

Аннотация

Рассмотрены проблемы, связанные с визуализацией данных в многомерном пространстве. В качестве одного из вариантов обсуждено использование Риманова пространства с переменной по величине и знаку кривизной для моделирования пространства визуализации. Рассмотрено использование уравнений Гильберта-Эйнштейна, Уинслоу, Бельтрами для моделирования геометрии пространства визуализации и пространства восприятия. Использование уравнений Бельтрами позволяет в некоторой степени нивелировать проблемы, связанные с визуализацией многомерной функции, но ограничено двумерностью. Использование уравнений Гильберта-Эйнштейна осложняется как неясностью трактования априорной информации, так и техническими трудностями. Наиболее перспективным представляется использование уравнений типа Уинслоу, соответствующих построению гармонических координат для уравнений Гильберта-Эйнштейна.

Ключевые слова: многомерное пространство, визуализация, Риманово пространство, уравнение Бельтрами, уравнения Уинслоу, уравнения Гильберта-Эйнштейна.

Введение

Работа с многомерными данными представляет один из наиболее интересных и перспективных разделов научной визуализации. В частности, к ним относится визуальный анализ многомерных функций, таких, как плотность распределения вероятности в уравнении Больцмана (в простейшем случае $f(x, y, z, u, v, w)$), многопараметрическое решение уравнений Навье-Стокса

$$\theta_{p;ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n = (\rho_{ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n, u_{ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n, v_{ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n, w_{ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n, e_{ijk;m_{g_1}...m_{g_q}}^n), \quad (1)$$

получаемое при решении векторной ($\theta \in R^p$) задачи в пространстве параметров $(g_1...g_q) \in \Omega_q \subset R^q$, волновая функция в конфигурационном пространстве при решении многочастичных задач квантовой механики и многие другие.

Однако, визуализация многомерных функций (даже в случае скалярной функции $f(x), x \in R^d$) при $d \geq 6$ затруднена как техническими проблемами (необходимые память и быстродействие катастрофически растут при увеличении размерности задачи (“проклятие размерности”)), так и геометрическими проблемами, связанными с отличием свойств многомерных пространств от стандартного для нас двух и трехмерных пространств [1,2]. В первую очередь к ним относится эффект

концентрации меры (Measure concentration), при которой большая часть объема сосредотачивается около поверхности тела. Объем объектов характерного размера $l \in [0,1]$ (по одной координате) в d -мерном пространстве изменяется как $\sim l^d$. Это влияет как на представление известных функций (особенно в виде двумерных сечений), так и на аппроксимацию неизвестных многомерных функций (при поиске их особенностей, максимумов, минимумов и т.д.).

Многомерные данные обычно задаются на некотором множестве точек пространства, которое соответствует не регулярной многомерной сетке, а некоторому ансамблю точек (с много меньшим числом узлов). Распространенным подходом к визуализации и анализу многомерных данных является понижение размерности и переход к двух и трехмерным объектам [3]. Понижение размерности можно выполнить как интуитивным выбором наиболее важных переменных, так и более формальным путем, например, используя анализ основных компонент (principal component analysis (PCA)). Также часто используется набор сечений плоскостями вдоль некоторого пути (tour path) [4,5], это позволяет находить и визуализировать некоторые особенности данных, например, дыры. Данные мы рассматриваем набор значений функции на некотором ансамбле точек пространства (гиперкуба, гиперсферы). Распространенными являются ситуации, когда многомерная функция может быть задана некоторым ансамблем точек или неявно, с помощью некоторого алгоритма. В обоих этих случаях простейшим кажется подход с построением функции в узлах регулярной сетки. К сожалению, в многомерном случае построение регулярной сетки по сути запрещено проклятием размерности (в 6 мерном случае, используя 100 узлов по каждой координате, мы получим $100^6 = 10^{12}$ узлов сетки, что создаст серьезные затруднения для стандартной вычислительной техники). Более реалистичным является построение функции в виде значений на случайном ансамбле узлов.

Явным недостатком такого подхода является отсутствие учета особенностей, специфичных для многомерных пространств. Например, на Рис. 1 представлено сечение 6-мерного кубика $Cub \in R^6$ со стороной $2/10$ по каждой координате плоскостью, которое дает визуальное представление о значимости этого кубика с точки зрения его размеров. К сожалению, это представление абсолютно неадекватно. В реальности отношение объема этого кубика к объему куба, в котором он содержится равно $(2/10)^6 = 1/13825 \sim 7 \cdot 10^{-5}$ и достаточно мало, соответствует точке. На Рис. 2 представлена визуализация 6-мерной функции, принимающей единичное значение на этом кубике. Это представление также не адекватно (в шестимерном пространстве рассматриваемая фигура более удачно иллюстрировалась бы некоторой иглой). Таким образом, наивная 2D визуализация 6-мерной фигуры радикально преувеличивает ее значимость с точки зрения величины объема. При этом погрешность среднего, рассчитанного по этим узлам, не зависит от размерности пространства и определяется числом узлов в ансамбле, что является основным преимуществом метода Монте-Карло при расчете интегралов. Однако, при использовании метода Монте-Карло с равномерной выборкой с большой вероятностью деталь, у которой объем не велик (типа вышеописанной функции, Рис. 2), обнаружена не будет, так как попадет между узлами. Особенно это относится к разрешению в окрестности центра гиперкуба/гиперсферы.

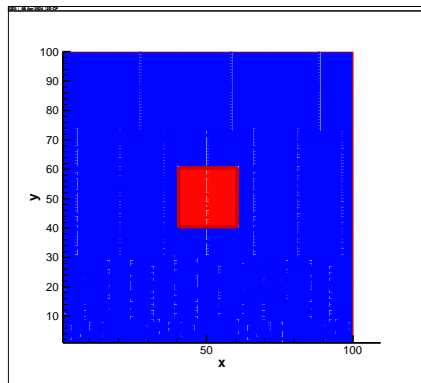


Рис. 1

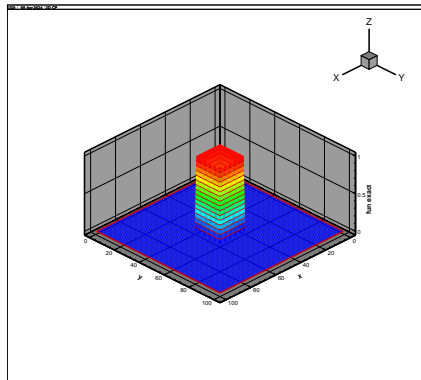


Рис. 2

Рис. 3 и Рис. 4 представляют визуализацию данного сечения с помощью преобразования координат (10), соответствующего наличию априорной информации в форме (11). Эти изображения гораздо лучше отражают важность фигуры с точки зрения занимаемого ей объема в шестимерном пространстве. Здесь мы имеем эффект обратный эффекту “огромной луны”, в котором априорная информация увеличивает некоторый объем в пространстве визуализации.

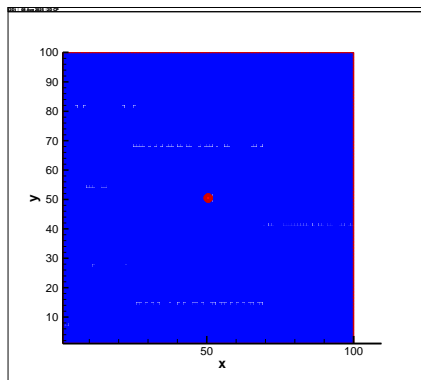


Рис. 3

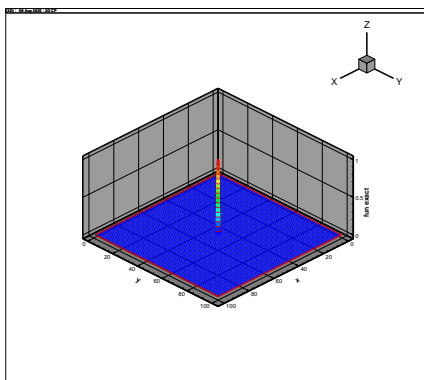


Рис. 4

1. Неэвклидова геометрия пространства восприятия

Следует отметить, что пространство человеческого визуального восприятия (**перцептивное пространство** (perception space)) не является линейной проекцией наблюдаемого физического пространства на плоскость сетчатки глаза. Простейшим примером, с которым сталкивался каждый, является “*эффект огромной луны*”, вследствие которого размеры Луны около горизонта выглядят существенно больше, чем около зенита. Такое преобразование возможно с помощью перехода к криволинейной системе координат либо в евклидовом пространстве, либо в неевклидовом пространстве. Существует большой набор работ, посвященных анализу геометрии пространства визуального восприятия. В работе [8] утверждается, что **перцептивное пространство** является пространством Лобачевского (имеет постоянную отрицательную кривизну). В работе [9] утверждается, что перцептивное пространство является пространством Римана с положительной кривизной. В работе [10] указывается, что перцептивное пространство является пространством Римана с кривизной переменного знака, плавно изменяющейся по расстоянию от наблюдателя: с отрицательной кривизной на близких расстояниях и с положительной кривизной на дальних расстояниях. В работе [11] представлены экспериментальные данные, подтверждающие предположение о наличии кривизны переменного знака, однако смена знака кривизны по этим данным происходит при достижении высоты уровня глаз (изменяется не по расстоянию, а по высоте).

В целом, особых сомнений в том, что перцептивное пространство является трехмерным Римановым пространством переменной кривизны и знака нет. Однако консенсуса об его точной структуре в настоящее время тоже нет. Это может быть связано как с индивидуальными отличиями между людьми, так и с зависимостью этого пространства от объекта наблюдения и априорной информации о нем.

Тем не менее, можно считать, что в рамках человеческого зрения на перцептивное пространство (некое трехмерное Риманово пространство переменной кривизны) проектируется некоторая область внешнего трехмерного евклидова пространства. Это соответствует трансформации точек касательного пространства и точек Риманова многообразия (экспоненциальная и логарифмическая карты) [12,13]. При такой трансформации меняется как метрический тензор, так и кривизна пространства.

Таким образом, в рамках человеческого зрения можно выделить три пространства: физическое, пространство визуализации и перцептивное пространство. В рамках научной визуализации (как приема для анализа данных) используется область в некотором промежуточном пространстве, пространстве визуализации, чаще всего двумерном (лист, экран), но в некоторых случаях и трехмерном (стереоочки). При этом возможен переход к новой криволинейной системе координат, задаваемой матрицей Якоби и соответствующим метрическим тензором. Расстояния между точками A, B в евклидовом пространстве с декартовыми координатами определяется как

$ds^2 = \delta_{jm}(x_j^A - x_j^B)(x_m^A - x_m^B)$, в неевклидовом $ds^2 = g_{jm}(x_j^A - x_j^B)(x_m^A - x_m^B)$, а в евклидовом пространстве с криволинейными координатами $ds^2 = \tilde{g}_{jm}(u_j^A - u_j^B)(u_m^A - u_m^B)$, где \tilde{g}_{jm} - метрический тензор, увеличивающий (или уменьшающий) некоторый объем пропорционально $\sqrt{\det \tilde{g}_{jm}}$.

Естественна попытка выделить интересующие нас особенности с помощью соответствующего метрического тензора и перехода к новым криволинейным координатам. Предположив пропорциональность метрического тензора (при переходе от декартовых к криволинейным координатам) некоторой априори заданной положительной функции $\tilde{g}_{jm}(u_i) \sim \rho(x, y, z)$ можно получить координаты, в которых, где больше $\rho(x, y, z)$, там больше шаг по пространству. Таким образом, в рамках эвклидова пространства априорная информация о ценности некоторого объема пространства может определяться полем метрического тензора $\tilde{g}_{jm}(u_i)$ в криволинейных координатах.

В настоящее время пространство визуализации, как правило (за исключением образцов средневековой живописи [10]) принимается эвклидовым ($g_{ik} = \delta_{ik}$). Однако вопрос о целесообразности использования эвклидовой метрики для пространства визуализации является нетривиальным. С одной стороны, во избежание дополнительных искажений было бы естественным, чтобы пространство визуализации имело бы ту же метрику, что и перцептивное пространство. С другой стороны, при визуализации многомерных пространств, переход от эвклидовой метрики к неевклидовой в пространстве визуализации может определяться совсем другими причинами и может оказаться, что метрика визуального пространства не должна совпадать с метрикой перцептивного.

Но в целом переход к неевклидовой метрике для пространства визуализации не кажется противоестественным, так как он в конечном итоге уже выполнен при переходе от трехмерного физического к трехмерному перцептивному.

Далее мы рассмотрим возможности визуализации, предоставляемые переходом как к криволинейным координатам в эвклидовом пространстве, так и к неевклидову пространству.

2. Возможности моделирования пространства восприятия с помощью уравнений Гильберта-Эйнштейна

В работе [10] предлагается моделировать перцептивное пространство с помощью уравнений Гильберта-Эйнштейна. Действительно, в достаточно общем случае метрику неевклидова пространства можно описать уравнениями типа Гильберта-Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = -T^{\mu\nu} \quad (2)$$

которые связывают тензор Риччи $R_{\mu k} = R^{\lambda}_{\mu\lambda k}$, $R_{ab} = \partial_m \Gamma^m_{ab} - \partial_a \Gamma^m_{mb} + \Gamma^m_{mn} \Gamma^n_{ab} - \Gamma^m_{an} \Gamma^n_{mb}$ (свертку

тензора кривизны 4 ранга $R^{\lambda}_{\mu\nu k} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{k\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu k} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}$), кривизну $R = g^{\mu k} R_{\mu k}$ (Ricci scalar), метрический тензор g_{jm} , тензор энергии-импульса, символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} = \frac{g^{\beta\delta}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right).$$

Уравнения Гильберта-Эйнштейна можно использовать для описания Риманового пространства как с положительной так и с отрицательной кривизной. В общей теории относительности (ОТО) уравнения Гильберта-Эйнштейна получаются из условий стационарности функционала действия Гильберта-Эйнштейна

$$S = \int L_{HE} \sqrt{g} d^4x = \int (R - \Lambda + L_{phys}) \sqrt{g(x)} d^4x. \quad (3)$$

На первый взгляд использование уравнений Гильберта-Эйнштейна для анализа геометрии перцептивного пространства и расчета его метрического тензора выглядит необоснованным. Тем более, что четырехмерное пространство, время и сигнатура псевдо-евклидова пространства Минковского, характерные для уравнений Гильберта-Эйнштейна в ОТО (с псевдо-Римановым пространством) в нашем случае не используются. Однако существует обстоятельство, оправдывающее такой подход. Уравнения типа Гильберта-Эйнштейна достаточно универсальны, и используются не только в общей теории относительности, но и в информационной геометрии, где метрическим тензором служит информационная матрица Фишера, $F_{ij} \in R^{n \times n}$ (тензор в пространстве плотностей вероятности случайного распределения $\rho(u, \theta)$) имеющая вид:

$$F_{ij} = \int \left(\frac{-\partial \ln \rho(u, \theta)}{\partial \theta_i} \right) \cdot \left(\frac{-\partial \ln \rho}{\partial \theta_j} \right) \rho du = \int \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} \frac{1}{\rho} du = 4 \int \frac{\partial \rho^{1/2}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \rho^{1/2}}{\partial \theta_j} du. \quad (4)$$

Несимметричное расстояние между двумя плотностями вероятности в одном и том же пространстве параметров можно ввести с помощью меры Кулльбака-Лейблера (Kullback-Leibler), иногда также обозначаемой как кросс-энтропия: $KL(f, g) = E_f(\ln(f(x)/g(x))) = \int (\ln(f(x)) - (\ln(g(x))f(x)dx$. Мера Кулльбака-Лейблера при малых расстояниях между плотностями распределения описывается информационной матрицей Фишера $KL(\rho(\theta_i + \Delta\theta_i), \rho(\theta_i)) \approx F_{jk} \Delta\theta_j \Delta\theta_k$.

Как показано в [13] для этого метрического тензора можно получить уравнение типа (2) $R^{\mu\nu}(\theta) - 1/2 g^{\mu\nu} R(\theta) + T^{\mu\nu}(\theta) = 0$. Аналогии между действием Гильберта-Эйнштейна и мерой информации Фишера рассматриваются также в работах [14,15]. Следует отметить, что матрица Фишера является обратной ковариационной матрицей и принадлежит Риманову пространству с неположительной кривизной, что не соответствует как ОТО так и перцептивному пространству.

К сожалению, природа тензора в правой части (аналога тензора энергии-импульса) в этих работах не конкретизируется (в [13] он обозначается, как “некоторые статистические ограничения”). По нашему мнению, их можно рассматривать как некоторую априорную информацию о метрике. Если предположить, что геометрия перцептивного пространства зависит от отображенных в нем объектов, то априорная информация о них играет роль, аналогичную тензору энергии-импульса. При этом априорная информация влияет на метрический тензор и на кривизну глобально, даже там, где $T^{\mu\nu} = 0$ (аналогично гравитации).

При обработке информации, происходящей при проектировании на перцептивное пространство, использование информации Фишера и информационной геометрии выглядит вполне естественным [16-18]. В частности в [17] показано, что подход информационной геометрии (использующий в качестве метрического тензора матрицу Фишера) оказывается применим и к анализу работы сетей нейронов при обработке визуальной информации. В этой работе перцептивное пространство обозначается как “visual space” и рассматривается как статистическое параметрическое пространство, чья геометрия определяется метрическим тензором, определяемым Гауссовым распределением. При этом кривизна пространства оказывается отрицательной. Соответствующие выражения для символов Кристоффеля приведены в [19].

Следует отметить, что матрица Фишера определена в параметрическом пространстве достаточно большой размерности, поэтому если она соответствует нейросетям, моделирующим человеческий мозг, то наше трехмерное перцептивное пространство не является следствием архитектуры нашего мозга, а является следствием его обучения трехмерными образцами. При обучении многомерными образцами трудности в нашем восприятии могут быть уменьшены или преодолены. В качестве примера можно взять

компьютерные игры HyperRouge (2011) и Hyperbolica (2022), которые позволяют обучить наше восприятие на образах из Риманова пространства отрицательной кривизны.

К сожалению, при решении уравнений типа Гильберта-Эйнштейна и последующей координатизации полученного решения встречается огромное количество как принципиальных так и технических сложностей, что показано в работах по ОТО [20]. По известной матрице Якоби $J_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ построить координаты можно, используя $du_i = \partial u_i / \partial x_j dx_j$. Однако построить координаты по одному метрическому тензору $g_{jm}(x, y, z)$ невозможно, да и само построение метрического тензора для уравнения Гильберта - Эйнштейна очень нетривиально. Это связано с тем, что 10 уравнений Гильберта - Эйнштейна в ОТО содержит 14 независимых величин, и для замыкания необходимо еще 4 дополнительных уравнения ("координатные условия"). Более того, благодаря соотношениям Бьянки [20] потребуется еще 4 дополнительных уравнения. Следует также отметить, что уравнения этого типа могут иметь сингулярности и содержат нетривиальную физику, зачастую требующую для интерпретации серьезных усилий. В интересном случае двумерного пространства уравнения Гильберта – Эйнштейна вырождены (тензор Гильберта – Эйнштейна исчезает, так как в этом случае $R_{ij} \equiv 1/2 R g_{ij}$).

Из-за перечисленных трудностей надежда на то, что идея Б. Раушенбаха [10] по моделированию перцептивного пространства с помощью уравнений типа Гильберта-Эйнштейна будет реализована, достаточно слаба. Основной причиной такой формы уравнений является выбор плотности Лагранжиана в действии Гильберта-Эйнштейна. Она определяется скалярной кривизной (скаляром Риччи, Ricci scalar), так как скалярная кривизна по теореме Вермейла (Vermeil's theorem) единственный инвариант, линейный по вторым производным метрического тензора и пригодный для построения динамической метрики. В рамках метрики, определяемой динамической информацией об объекте, избежать решения уравнения Гильберта-Эйнштейна невозможно (если не уходить к более сложным Лагранжианам). Однако поиск более простых подходов к моделированию Риманова пространства переменной кривизны (с более простыми плотностями Лагранжиана и более простыми уравнениями) выглядит перспективным. В частности, на практике вычислительной аэрогазодинамики (при построении расчетной сетки) довольно часто реализуется преобразование координат, удовлетворяющее некоторому функционалу метрического тензора (без его производных). Вместо решения уравнений типа Гильберта-Эйнштейна при этом решаются уравнения Winslow (или аналоги), определяющие как преобразование координат, так и метрические коэффициенты. В стандартном варианте (задачах аэрогазодинамики) эти уравнения задают преобразование координат в Евклидовом пространстве. Однако, на языке ОТО решение уравнений Winslow соответствует построению гармонических координат в Римановом пространстве.

Уравнения типа Winslow позволяют построить криволинейную координатную систему, в некоторых случаях соответствующую Риманову пространству. В части работ координатизация Риманова пространства осуществляется с помощью решения уравнений Бельтрами [21, 22].

Здесь мы рассмотрим возможность построения координат в Римановом пространстве с использованием уравнений Winslow с источниковыми членами и уравнений Бельтрами.

4. Подход к построению перцептивного пространства с помощью функционалов, зависящих от метрического тензора

В работах по аэрогазодинамике [24,25,26] для построения неравномерных расчетных сеток часто используется преобразование координат из физического пространства (двух или трехмерного эвклидова) в вычислительное. Здесь мы будем рассматривать двумерный случай, при этом физическая плоскость (x, y) (x_i) преобразуется в вычислительную плоскость (ξ, η) (u_i) через решение уравнения Пуассона с источниковыми членами. Рассмотрим использование функционала Winslow [26,27, 28]

$$I = \int (g_{11}^2 + g_{22}^2) dx \cdot dy = \int (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dx \cdot dy = \int \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{\tilde{J}^2} \tilde{J} d\xi d\eta = \int \frac{\tilde{g}_{11}^2 + \tilde{g}_{22}^2}{\sqrt{\tilde{g}(\xi, \eta)}} d\xi d\eta. \quad (5)$$

Он обеспечивает максимальную гладкость преобразования и при этом запрещает обращение в нуль якобиана \tilde{J} (и соответствующего метрического тензора) и вырождение соответствующего преобразования. Преобразования производных в (5) [28] получаются из соотношений $x(\xi(x, y), \eta(x, y)) = x$, $y(\xi(x, y), \eta(x, y)) = y$, которые дифференцируют по x, y .

Добавим к стандартной постановке функционала потенциал $\Phi(\xi, \eta)$

$$I(\xi, \eta, \xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y) = 1/2 \int (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2 + \Phi(\xi, \eta)) dx \cdot dy \quad (6)$$

и рассмотрим его вариацию

$$\delta I = \int (\xi_x \delta \xi_x + \xi_y \delta \xi_y + \eta_x \delta \eta_x + \eta_y \delta \eta_y + \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \xi \cdot \delta \xi + \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \eta \cdot \delta \eta) dx \cdot dy. \quad (7)$$

Проинтегрируем (7) по частям

$$\begin{aligned} \delta I = & \int \partial(\xi_x^2) / \partial \xi_x \delta \xi / \partial x + \partial(\xi_y^2) / \partial \xi_y \delta \xi / \partial y + \partial \Theta / \partial \xi \delta \xi dx dy + \\ & + \int \partial(\eta_x^2) / \partial \eta_x \delta \eta / \partial x + \partial(\eta_y^2) / \partial \eta_y \delta \eta / \partial y + \partial \Theta / \partial \eta \delta \eta dx dy = \\ & - \int (\xi_{xx} \cdot \delta \xi + \xi_{yy} \cdot \delta \xi - \partial \Theta / \partial \xi \cdot \delta \xi) dx \cdot dy - \int (\eta_{xx} \cdot \delta \eta + \eta_{yy} \cdot \delta \eta - \partial \Theta / \partial \eta \cdot \delta \eta) dx \cdot dy. \end{aligned}$$

Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид уравнений Пуассона с нелинейными источниками (в стандартном варианте веса P, Q добавляются искусственно)

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) = \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \xi \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) = \partial \Phi(\xi, \eta) / \partial \eta \end{aligned} \quad (8)$$

Далее переменные (ξ, η) принимаются за независимые и на равномерной сетке по (ξ, η) решается система

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -\tilde{J}^2 (Px_\xi + Qx_\eta) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -\tilde{J}^2 (Py_\xi + Qy_\eta) \end{aligned} \quad (9)$$

Система содержит распределенные источники и позволяет рассчитать координаты (x, y) в узлах равномерной сетки (ξ, η) . Здесь присутствует метрический тензор, имеющий вид, соответствующий Эвклидовой метрике.

Источниковый член в (8) и (9) используется в форме

$$P = Q = b \times \text{sign}(\xi - \xi_0) \times \exp(-d\{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2\}^{1/2}), \quad (10)$$

что позволяет сжимать узлы сетки в физическом пространстве (x, y) около точек $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$.

В нашем простейшем (двумерном) случае переменные (ξ, η) соответствуют исходным координатам, получаемым простым сечением плоскостью. Переменные

(x, y) соответствуют трансформированным координатам, при этом сетка, в которой задана функция уже не будет равномерной.

Достаточно популярен также функционал

$$I = 1/2 \int (\tilde{g}_{11} + \tilde{g}_{22}) d\xi d\eta = \int (x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta, \quad (11)$$

который задает условия Коши-Римана $(x_\xi = y_\eta); (x_\eta = -y_\xi)$ в вариационной форме через $\int ((x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2) d\xi d\eta = \int (x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta$ и называется функционалом “длины” (Length functional). Уравнения, выражающие стационарность функционала “длины” имеют вид

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= 0 \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Другая форма [23] функционала “длины” имеет вид

$$I = 1/2 \int (\frac{\tilde{g}_{11}}{P} + \frac{\tilde{g}_{22}}{Q}) d\xi d\eta = 1/2 \int (Q\tilde{g}_{11} + P\tilde{g}_{22}) \frac{1}{PQ} d\xi d\eta. \quad (13)$$

Здесь $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$ положительные функции, обеспечивающие сгущение сетки в выбранных зонах, $\tilde{J} = \sqrt{\tilde{g}} = 1/(PQ)$. Соответствующие уравнения приобретают форму

$$(\frac{x_\xi}{P})_\xi + (\frac{x_\eta}{Q})_\eta = 0, (\frac{y_\xi}{P})_\xi + (\frac{y_\eta}{Q})_\eta = 0. \quad (14)$$

Кроме функционалов Winslow и длины при построении сетки иногда минимизируются другие функционалы [24], напрямую связанные с компонентами метрического тензора. К ним относятся функционалы ортогональности, функционал площади, Liao.

Функционал ортогональности

$$I = 1/2 \int (\tilde{g}_{12}(\xi, \eta))^2 d\xi d\eta = \int (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta = \int (\eta_y \xi_y + \eta_x \xi_x)^2 \tilde{J} dx dy, \quad (15)$$

($I = \int (\eta_y \xi_y + \eta_x \xi_x)^2 \tilde{J} dx dy$ получено с учетом $x_\xi = \tilde{J} \eta_y$, $y_\xi = -\tilde{J} \eta_x$, $x_\eta = -\tilde{J} \xi_y$, $y_\eta = \tilde{J} \xi_x$, $d\xi d\eta = dx dy / \tilde{J}$).

Он обнуляет недиагональные члены метрического тензора. Согласно [29] соответствующие уравнения Эйлера Лагранжа являются квазилинейными, сопряженными и не эллиптическими. Решение часто не сходится, а когда сходится получившиеся сетки имеют складки.

Функционал площади

$$I = 1/2 \int \tilde{J}^2 d\xi d\eta = 1/2 \int \tilde{g} d\xi d\eta = \int (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\xi d\eta \quad (16)$$

Согласно [24,29] соответствующие уравнения Эйлера Лагранжа являются квазилинейными, сопряженными и не эллиптическими

$$\begin{aligned} y_\eta^2 x_{\xi\xi} - x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_\eta + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} - x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} &= 0 \\ y_\eta^2 y_{\xi\xi} - x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta} - x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно [29] результатов относительно существования и единственности этих уравнений нет, решения не гладкие и имеют складки.

Функционал Liao (норма Фробениуса метрического тензора)

$$I = 1/2 \int ((\tilde{g}_{11})^2 + 2(\tilde{g}_{12})^2 + (\tilde{g}_{22})^2) d\xi d\eta = 1/2 \int \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{ij} d\xi d\eta. \quad (18)$$

Условиями стационарности этих функционалов служат ЧДУ второго порядка, некоторые из которых достаточно легко решаются на практике и позволяют осуществить преобразование декартовых координат в криволинейные и наоборот. Часть функционалов (площади, ортогональности, Liao) порождают решения, содержащие складки. В качестве лекарства иногда используются суммы этих функционалов [29].

5. Построение конформных координат и система Бельтрами

В работах [21,22] для двумерного случая рассмотрено построение системы координат, реализующих заданную Риманову метрику с помощью решения системы Бельтрами (Beltrami system)

$$gx_\xi = -g_{12}y_\xi + g_{11}y_\eta, \quad gx_\eta = -g_{22}y_\xi + g_{12}y_\eta, \quad g^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \quad (19)$$

Выразив

$$u_x = \frac{-g_{12}v_x + g_{11}v_y}{g}, \quad u_y = \frac{-g_{22}v_x + g_{12}v_y}{g}, \quad (20)$$

а затем продифференцировав (20) $u_{xy} = \frac{-g_{12,y}v_x - g_{12}v_{xy} + g_{11,y}v_y + g_{11}v_{yy}}{g} - \frac{g_y}{g^2},$

$u_{yx} = \frac{-g_{22,x}v_x - g_{22}v_{xx} + g_{12,x}v_y + g_{12}v_{yx}}{g} - \frac{g_x}{g^2},$ получим возможность исключить одну переменную (u), вычтя выражения для перекрестных производных

$$g_{22}v_{xx} - 2g_{12}v_{xy} + g_{11}v_{yy} + (g_{22,x} - g_{12,y})v_x + (g_{11,y} - g_{12,x})v_y + \frac{g_x - g_y}{g} = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения позволяет вычислить $v(x, y)$, далее имея поле u_x, u_y , рассчитаем $u(x, y)$ интегрированием. В численных расчетах использовалась функция априорной важности $\theta(x, y)$ при которой деформация расстояния записывается как $ds^2 = g_{jm}\delta x_j \delta x_m = \theta(x, y)(dx^2 + dy^2)$ и дает компоненты тензора $g_{xx} = \theta, \quad g_{yy} = \theta, \quad g_{xy} = 0$. В

работах [21,22] используется достаточно универсальная форма $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \delta(x^2 + y^2))^2}$, пригодная для Римановых пространств как с отрицательной, так и с положительной кривизной.

Использование системы уравнений Бельтрами позволяет осуществить простейший способ построения координат в Римановом пространстве, однако ограничено только двумерным случаем. Уравнения типа Winslow с этой точки зрения более универсальны, однако интерпретация функционала $\Phi(\xi, \eta)$ с точки зрения информации затруднена.

6. Функция важности

Если мы ориентируемся на преобразование координат типа (9), (10), основной интерес для нас представляет определение формы и смысла источниковых членов (P, Q) . Они могут быть связаны чисто с геометрией пространства, либо со свойствами функции. Аналогом является сопряженная функция $\psi(x, y, z, u, v, w)$ [30], которая позволяет визуализировать зоны, где функция $f(x, y, z, u, v, w)$ оказывает наибольшее влияние на ценный функционал. В случае $\psi(x, y, z, u, v, w) > 0$ сопряженную функцию можно связать с метрическим тензором $\psi \sim J = \sqrt{g}$, что дает априорную информацию о зонах влияния функции. В частности, при эффекте огромной луны $d\tilde{V} \sim \sqrt{g}dV$ априорная информация искажает объемы. В нашем случае, мы используем конформное отображение $dx^2 + dy^2 = \rho(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2)$ и функцию (11) в качестве априорной информации. Решая далее уравнения Бельтрами (19) можно построить преобразование координат, аналогичное представленным на Рис. 3 и 4.

7. Обсуждение

Представлено двумерное сечение 6 мерного гиперкуба (Рис. 1,2) в евклидовых координатах и в Римановых координатах (Рис. 3,4) с априорной метрикой (11) и построением координат решением уравнения Уинслоу (10). Оно более информативно в части отображения объема, занимаемого функцией в сравнении с стандартным сечением гиперкуба плоскостью. Это достигается за счет неевклидовой трансформации пространства визуализации.

В значительной степени визуализация сводится к отображению некоторого физического пространства (чаще всего трехмерного, но в некоторых случаях и многомерного (например, 6-мерное пространство скоростей и координат в уравнении Больцмана) на двумерное (иногда трехмерное) промежуточное пространство-пространство визуализации. Далее пространство визуализации отображается на пространство восприятия (перцептивное пространство), которое является трехмерным пространством Римана с переменной кривизной.

Риманова геометрия пространства восприятия подтверждена как многочисленными современными экспериментами, так и многочисленными примерами средневековой живописи.

Пространство визуализации в современной практике, обычно евклидово. В данной работе мы рассматриваем возможности, предоставляемые Римановой метрикой в пространстве визуализации и проблемы, порождаемые таким подходом.

Как мы уже видели (Рис. 1,2), наивная визуализация многомерной функции с помощью сечений плоскостями существенно искажает представление об объеме этой функции. Нелинейное преобразование координат с использованием Римановой метрики позволяет исправить эти искажения (Рис. 3,4).

В идеале пространство визуализации должно иметь ту же геометрию, что и перцептивное пространство, что должно уменьшить искажения при проектировании из одного пространства в другое. В случае двумерной визуализации полное устранение искажений вряд ли возможно из-за различия в размерности (художественные попытки этого представлены в [10]). В случае трехмерной визуализации неясно как технически выполнить построение образа в неевклидовой геометрии. Более того, неясно насколько геометрия пространства восприятия универсальна при переходе от одного индивидуума к другому.

Заключение

Для визуализации многомерных функций можно использовать трансформированную плоскость с Римановой метрикой, где метрический тензор может определяться геометрией и размерностью пространства, априорной информацией о значимости некоторых областей.

Использование уравнений типа Гильберта-Эйнштейна для моделирования пространства с Римановой метрикой оправдывается аналогией между Римановыми физической и информационной геометриями. Однако решение уравнений типа Гильберта-Эйнштейна крайне трудоемко и нетривиально. Вместо уравнений Гильберта-Эйнштейна для моделирования перцептивного пространства и пространства визуализации проще использовать уравнения типа Winslow или уравнения Бельтрами.

С учетом того, что матрица Фишера определена в параметрическом пространстве достаточно большой размерности, определяемом числом использованных нейронов, наше привычное трехмерное перцептивное пространство не является следствием архитектуры нашего мозга, а является следствием его обучения трехмерными образцами. Вполне вероятен переход к многомерному пространству при обучении многомерными образцами. В качестве аналогии можно рассмотреть компьютерные

игры HyperRouge и Hyperbolica, которые позволяют обучить наше восприятие на образах из Риманова пространства отрицательной кривизны.

Список литературы

1. Зорич В.А., Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность. ТВП 59:3 (2014), 436-451.
2. Мильман В.Д., Явления, возникающие в высоких размерностях, УМН, т. 59, N 1, с 157-168, 2004
3. Chen H. et al, Noisy Data Visualization using Functional Data Analysis, arXiv:2406.03396v1 [cs.LG] 5 Jun 2024
4. Laa U., Cook D., Andreas Buja, and German Valencia. 2020. Hole or grain? A Section Pursuit Index for Finding Hidden Structure in Multiple Dimensions. arXiv:2004.13327v3 [stat.CO] 10 Mar 2022
5. Laa U., Cook D., and Valencia G. 2020. A slice tour for finding hollowness in high-dimensional data. arXiv:1910.10854v1 [stat.CO] 24 Oct 2019
6. Curtis A. and Lomax A., Prior information, sampling distributions, and the curse of dimensionality. Geophysics, 66(2):372–378, March 2001.
7. Laa U., Cook D., Lee S., Burning sage: Reversing the curse of dimensionality in the visualization of high-dimensional data, arXiv:2009.10979v1 [stat.CO] 23 Sep 2020,
8. Luneburg R.K., Metric methods in binocular visual perception, in Courant Anniversary Volume, Eds K. O. Friedrichs et al (New York: Interscience) 1948, pp 215-240
9. Battro A.M., Riemannian geometries of variable curvature in visual space: visual alleys, horopters, and triangles in big open fields, Perception, 1976, volume 5, pages 9-23 ,
10. Раушенбах Б.В., Пространственные построения в живописи, М. Наука, 1980,
11. Koenderink J. J., Van Doorn A. J., and Lappin J. S., Direct measurement of the curvature of visual space. Perception, 29(1):69–79, 2000
12. Barachant A. et al, Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications, Neurocomputing, 2014
13. Calmet X., Calmet J. Dynamics of the Fisher information metric, arXiv:cond-mat/0410452v1, 2004
14. Chimento L.P., Pennini F., Plastino A., Einstein’s gravitational action and Fisher’s information measure, Physics Letters A 293 (2002) 133–140
15. Matsueda H., Emergent general relativity from Fisher information metric. arXiv preprint arXiv:1310.1831, 2013.
16. Wagenaar D. A., Information Geometry for Neural Networks, King’s College London, 1998
17. Mazumdar D. et al, Investigation of the neural origin of non-Euclidean visual space and analysis of visual phenomena using information geometry, arXiv:2505.13917v1, 2025,
18. Mazumdar D. Representation of 2d frame less visual space as a neural manifold and its information geometric interpretation. arXiv:2011.13585, 2020.
19. Costa S. I. R., Santos S. A., Strapasson J.E., Fisher information distance: a geometrical reading, arXiv.1210.2354v3[stat.ME],10 Jan,2014.
20. Arnold D. N., Numerical Problems in General Relativity, Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, P. Neittaanmaki, T. Tiihonen, P. Tarvainen eds., WS, Singapore, pp. 3–15.
21. Белинский П. П., Годунов С. К., Иванов Ю. Б., Яненко И. К., Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами, ЖВМ, 1975, т. 5, N 6, 1499–1511
22. Берс Л. И др., Уравнения с частными производными, М. Мир 1966
23. Knupp P. M. and Steinberg. S. Fundamentals of Grid Generation. CRC Press., 1993.
24. Khattri S. K., Grid Generation and Adaptation by Functionals, arXiv:math/0607388v1 [math.NA] 17 Jul 2006

25. Charakhchyan A. A. and Ivanenko S. A., A Variational Form of the Winslow Grid Generator, JCP 136, 385–398 (1997)
26. Brackbill J. U. and Saltzman J. S., Adaptive zoning for singular problems in two dimensions, JCP. 46, 342 (1982)
27. Тишкин В. Ф., Методы построения расчетных сеток, МГУ, 2016
28. Fortunato M., Persson P-O., High-order unstructured curved mesh generation using the Winslow equations, JCP, V. 303, pp 1-14 2016,
29. Tinoco J.G., Barrera P. and Cortes A., Some Properties of Area Functionals in numerical Grid Generation. X Meshing Round Table, Newport Beach, California, USA., 2001.
30. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Применение сопряженных уравнений и визуальное представление сопряженных параметров в задачах идентификации и управления течением, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 50, 2011, 24 с.

On Visualization of Functions in High-Dimensional Space

A.K. Alekseev^{1,B}, A.E. Bondarev^{2,A}

^A Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

^B RSC Energia, Korolev, Russia

¹ ORCID: 0000-0001-8317-8688, post@rsce.ru

² ORCID: 0000-0003-3681-5212, bond@keldysh.ru

Abstract

Problems associated with data visualization in multidimensional space are considered. One option discussed is the use of Riemannian space with variable curvature in magnitude and sign for modeling the visualization space. The Hilbert-Einstein, Winslow, and Beltrami equations are considered for modeling the visualization and perception space using geometry. The Beltrami equations can, to some extent, mitigate the problems associated with visualizing multidimensional functions, but are limited by two-dimensionality. The use of Hilbert-Einstein equations is complicated by both the ambiguity of interpreting a priori information and technical difficulties. The most promising approach appears to be the use of Winslow-type equations, which correspond to the construction of harmonic coordinates for the Hilbert-Einstein equations.

Keywords: multidimensional space, visualization, Riemannian space, Beltrami equation, Winslow equations, Hilbert-Einstein equations.

References

31. Zorich V.A., Multidimensional geometry, functions of very many variables and probability. TVP 59 :3 (2014), 436–451.
32. Milman V.D., Phenomena arising in high dimensions, Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 59, No. 1, pp. 157–168, 2004
33. Chen H. et al, Noisy Data Visualization using Functional Data Analysis, arXiv:2406.03396v1 [cs.LG]5 Jun 2024
34. Laa U., Cook D., Andreas Buja, and German Valencia. 2020. Hole or grain? A Section Pursuit Index for Finding Hidden Structure in Multiple Dimensions. arXiv:2004.13327v3 [stat.CO]10 Mar 2022
35. Laa U., Cook D., and Valencia G. 2020. Aslice tour for finding hollowness in high-dimensional data. arXiv:1910.10854v1 [stat.CO]24 Oct 2019
36. Curtis A. and Lomax A., Prior information, sampling distributions, and the curse of dimensionality. Geophysics, 66(2):372–378, March 2001.
37. Laa U., Cook D., Lee S., Burning sage: Reversing the curse of dimensionality in the visualization of high-dimensional data, arXiv:2009.10979v1 [stat.CO] 23 Sep 2020,
38. Luneburg R.K., Metric methods in binocular visual perception, in Courant Anniversary Volume, Eds K. O. Friedrichs et al (New York: Interscience) 1948, pp 215-240
39. Battro A.M., Riemannian geometries of variable curvature in visual space: visual alleys, horopters, and triangles in large open fields, Perception, 1976, volume 5, pages 9-23,
40. Rauschenbach B.V., Spatial constructions in painting, M. Nauka, 1980,
41. Koenderink J.J., Van Doorn A.J., and Lappin J.S., Direct measurement of the curvature of visual space. Perception, 29(1):69–79, 2000
42. Barachant A. et al, Classification of covariance matrices using a Riemannian-based kernel for BCI applications, Neurocomputing, 2014

43. Calmet X., Calmet J. Dynamics of the Fisher information metric, arXiv:cond-mat/0410452v1, 2004
44. Chimento L.P., Pennini F., Plastino A., Einstein's gravitational action and Fisher's information measure, *Physics Letters A* 293 (2002) 133–140
45. Matsueda H., Emergent general relativity from Fisher information metric. arXiv preprint arXiv:1310.1831, 2013.
46. Wagenaar D.A., *Information Geometry for Neural Networks*, King's College London, 1998
47. Mazumdar D. et al, Investigation of the neural origin of non-Euclidean visual space and analysis of visual phenomena using information geometry, arXiv:2505.13917v1, 2025,
48. Mazumdar D. Representation of 2d frame less visual space as a neural manifold and its information geometric interpretation. arXiv: 2011.13585, 2020.
49. Costa S.I.R., Santos S.A., Strapasson J.E., Fisher information distance: a geometrical reading, arXiv.1210.2354v3[stat.ME], 10 Jan,2014.
50. Arnold D.N., *Numerical Problems in General Relativity*, Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, P. Neittaanmaki, T. Tiihonen, P. Tarvainen eds., WS, Singapore, pp. 3–15.
51. Belinsky P. P., Godunov S. K., Ivanov Yu. B., Yanenko I. K., Application of one class of quasiconformal mappings for constructing difference grids in domains with curvilinear boundaries, *JVM*, 1975, v. 5, no. 6, 1499–1511
52. Bers L. et al., *Partial Differential Equations*, M. Mir 1966
53. Knupp P.M. and Steinberg. S. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press., 1993.
54. Khattri S.K., *Grid Generation and Adaptation by Functionals*, arXiv:math/0607388v1 [math.NA]17 Jul 2006
55. Charakhchyan A.A. and Ivanenko S.A., A Variational Form of the Winslow Grid Generator, *JCP* 136, 385–398 (1997)
56. Brackbill J.U. and Saltzman J.S., Adaptive zoning for singular problems in two dimensions, *JCP*. 46, 342 (1982)
57. Tishkin V. F., *Methods for constructing computational grids*, Moscow State University, 2016
58. Fortunato M., Persson P. O., High-order unstructured curved mesh generation using the Winslow equations, *JCP*, V. 303, pp 1-14 2016,
59. Tinoco J.G., Barrera P. and Cortes A., Some Properties of Area Functionals in numerical Grid Generation. X Meshing Round Table, Newport Beach, California, USA, 2001.
60. Alekseev A.K., Bondarev A.E. Application of adjoint equations and visual representation of adjoint parameters in problems of flow identification and control, Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, No. 50, 2011, 24 p.